

CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q gọi là công bội.

Theo định nghĩa ta có: $u_{n+1} = u_n \cdot q$ ($n = 1, 2, \dots$).

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$ thì cấp số nhân là một dãy số dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số dạng $u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Nếu $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân là dãy số $0, 0, \dots, \dots$

2. Số hạng tổng quát

 **Định lý:**

Số hạng tổng quát của một cấp số nhân được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 q^{n-1} \quad (q \neq 0)$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

 **Định lý:**

Trong một cấp số nhân, mỗi số hạng kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) đều có giá trị tuyệt đối là trung bình nhân của hai số hạng kề bên nó, tức là:

$$|u_k| = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}} \quad (k \geq 2)$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

 **Định lý:**

Cho một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ Khi đó:

$$S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh các dãy số : $(2^n), \left(\frac{5}{2^n}\right), \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ là những cấp số nhân, tìm công bội của chúng.

Bài 2. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân, tìm công bội (nếu có):

- a. $3; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}$ b. $-2; 4; -8; 16; 32$ c. (u_n) với $u_n = 2 \cdot 3^n$ d. (a_n) với $a_n = 4n$

Bài 3. Cho cấp số nhân có (u_n) với công bội q .

- a. Biết $u_1 = 2, u_6 = 486$. Tìm q, u_8, S_8
 b. Biết $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm $u_1, u_9; S_8$.
 c. Biết $u_1 = 3, q = -2$. Hỏi 192 là số hạng thứ mấy?

Bài 4. Tìm cấp số nhân có 5 số hạng biết;

a. $u_3 = 3, u_5 = 27$ b. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases}$

Bài 5. Xác định số hạng đầu tiên, công bội của cấp số nhân và tìm $a_7; S_8$ biết :

a. $\begin{cases} a_5 = 96 \\ a_6 = 192 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a_4 = \frac{3}{2} \\ a_9 = 48 \end{cases}$
 c. $\begin{cases} a_4 - a_2 = 72 \\ a_5 - a_3 = 144 \end{cases}$ d. $\begin{cases} a_7 - a_4 = -210 \\ a_5 - a_4 = -72 \end{cases}$
 e. $\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = 65 \\ a_1 + a_7 = 325 \end{cases}$ f. $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -21 \\ a_2 + a_4 = 10 \end{cases}$
 g. $\begin{cases} a_1 + a_6 = 244 \\ a_3 + a_4 = 36 \end{cases}$ h. $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 351 \end{cases}$

Bài 6. Cho biết $q = 3; a_n = 972; S_n = 1456$. Tìm n và a_1 .

Bài 7. Tìm cấp số nhân có 6 số hạng, biết tổng của 3 số hạng đầu là 168 và tổng của 3 số hạng sau là 21

Bài 8. Tìm ba số a, b, c liên tiếp của một cấp số nhân biết $abc = 729$ và $a + b + c = -21$

Bài 9. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân biết $abc = 64$ và $a + b + c = 14$.

Tìm a, b, c .

Bài 10. Tìm ba số liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 14 và tổng các bình phương của chúng là 84.

Bài 11. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh :

a. $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$
 b. $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$
 c. $(bc + ca + ab) = abc(a + b + c)^3$
 d. Ba số $\frac{1}{3}(a + b + c); \sqrt{\frac{1}{3}(ab + bc + ca)}; \sqrt[3]{abc}$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 12. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng, ba số a, c, b lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 30$. Tính 3 số đó.

Bài 13. Cho ba số $\frac{2}{b-a}; \frac{1}{b}; \frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng. CMR : a, b, c lập thành một csn

Bài 14. Tìm hai số a, b biết $1, a, b$ lập thành một cấp số nhân và $1, a+8, b$ lập thành một csc .

Bài 15. Các số a, b, c phải thỏa điều kiện gì để chúng vừa tạo thành một cấp số cộng vừa tạo thành một cấp số nhân.